2. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 27.–28.04.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe und $a \in \mathbb{D}$.
Zeige, daß $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ f(z) = \dfrac{z-a}{\overline{a}z - 1}$, bijektiv ist, und bestimme $f \circ f$.

(b) Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Zeige: $z \in \mathbb{H} \iff -1/z \in \mathbb{H}$.
Zeige, daß $g : \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, bijektiv ist, und bestimme g^{-1}.

2. Aufgabe (4 + 2 Punkte)

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend). Zeige, daß G auch wegzusammenhängend ist.

(b) Seien G_1 und G_2 Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Entscheide (Beweis oder Gegenbeispiel), ob (i) $G_1 \cup G_2$ und (ii) $G_1 \cap G_2$ Gebiete sind.

(c) Sei $f(z) = z^2 + c$. Finde die Häufungswerte der Folge $z_1 = 0,\ z_{n+1} = f(z_n)$, für (i) $c = 1/4$, (ii) $c = i/4$; ohne Beweis: (iii) $c = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}$, (iv) $c = -1 + \frac{i}{4}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = |z|^2$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar und in welchen Punkten holomorph? Ist f reell differenzierbar?

(b) Seien f, g reell differenzierbar mit $f(z) = w$. Zeige:

(i) $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)}$,

(ii) $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial w}\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}}\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}$.

Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte)

Betrachte $(a-b)^3 + 3ab(a-b) + b^3 - a^3 = 0$ und bestimme für $p, q \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$. Wie findet man weitere Lösungen?