3. Blatt zur Funktionentheorie
Abgabe: 04.–05.05.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und $a_1 \neq 0$. Zeige, daß es $r > 0$ gibt, so daß f in $D_r(z_0) = \{|z - z_0| < r\}$ injektiv ist.

(b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n\geq 0} n(n+1)z^n$ konvergiert, und berechne den Wert der Reihe für diese z.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, daß $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ für $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{-1\}$ konvergent ist.

(b) Sei $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}$ die geschlitzte Ebene und $\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus.
Zeige, daß $\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ für $z \in \mathbb{D}$.

(c) Zeige, daß (b) auch für $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}$ gilt. (+ 2 Punkte)

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $\tau \in [0, 2\pi)$ und $G = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\tau} \,|\, r \geq 0\}$. Bestimme eine stetige Funktion $w : G \to \mathbb{C}$ mit $(w(z))^2 = z$ für $z \in G$. Wohin kann w stetig fortgesetzt werden? Finde Punkte $a, b \in G$, so daß $w(a^2) = a$ und $w(b^2) = -b$.

(b) Finde (möglichst große) Gebiete, auf denen ein Zweig von

$$\text{(i) } \operatorname{Log}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \quad , \quad \text{(ii) } \sqrt[3]{z - \frac{i}{z} + i} \quad , \quad \text{(iii) } \operatorname{Log}\left(e^{i\pi}\frac{z-i}{z+i}\right)$$

als holomorphe Funktion erklärt werden kann.

Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, d.h. M ist offen und es gibt ein $z_0 \in M$, so daß für jedes $z \in M$ die Strecke $[z, z_0]$ ebenfalls in M liegt. Zeige, daß das Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ zusammenhängend ist. Tip: $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ zusammenhängend $\iff$ $\mathbb{C} \setminus M$ besitzt keine beschränkte Zusammenhangskomponente.