4. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 11.–12.05.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Zeige:

(a) Für $b \in D_r(a)$ läßt sich f auch in eine Potenzreihe um b entwickeln. Bestimme die Koeffizienten bzgl. der Entwicklung um b.

(b) Sei $z_k \to a$ eine konvergente Folge mit $z_k \neq a$. Ist $f(z_k) = 0$ für $z_k \in D_r(a)$, dann gilt $a_n = 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, d.h. $f \equiv 0$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, und sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve von a nach b, wobei $0 \notin |\gamma|$, falls $n < 0$. Dann gilt

$$\int_\gamma z^n \, dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \; .$$

(b) Betrachte die positiv orientierte Kreislinie $\partial D_r(a) : t \mapsto a + re^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(a)} \frac{dz}{z-a} = 1 \; .$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei γ eine geschlossene glatte Kurve. Für $z \notin |\gamma|$ definiere die *Windungszahl*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \; .$$

Dann gilt $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$, und $n(\gamma, z)$ ist in jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant:

(i) Betrachte zuerst eine glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ von a nach b und setze

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\dot\gamma(\tau)}{\gamma(\tau) - z} \, d\tau \quad \text{für} \quad t \in [0,1] \; .$$

Zeige: $\frac{d}{dt}[(\gamma(t) - z)e^{-\varphi(t)}] \equiv 0$ und folgere $\exp \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{b-z}{a-z}$.

(ii) Benutze, daß $n(\gamma, z)$ stetig ist in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte)

Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ beschränkte Gebiete und sei $f : G \to H$ biholomorph. Zeige: Ist f stetig auf $\overline{G}$, dann ist $f(\partial G) = \partial H$.