5. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 18.–19.05.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei G ein konvexes Gebiet, d.h. zu $a, b \in G$ liegt auch die Strecke $[a, b]$ in G.
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph (und f' stetig). Zeige:
Ist $|f'(z) - 1| < 1$ für alle $z \in G$, dann ist f injektiv.

(b) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Zeige: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ für $z \in \mathbb{D}$.
Zeige, daß f injektiv ist, und bestimme $f(\mathbb{D})$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige:

(a) (i) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein offenes Dreieck. Sei f holomorph in Δ und stetig auf $\overline{\Delta}$.
Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.
(ii) Sei D ein Sterngebiet und L eine Gerade. Sei f stetig in D und holomorph in $D \setminus L$. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf D.

(b) Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in G$.
Dann gilt $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} \mid |y| \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$ und

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad .$$

Bestimme eine Stammfunktion von $f|_G$. Besitzt f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$?
Berechne $\displaystyle\int_{|z-i|=1} f(z)\, dz\,,\ \int_{|z+i|=1} f(z)\, dz$ und $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\, dz\,.$

Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte)

Sei G ein Gebiet und $z \in G$. Sei $w \in \partial G$ ein Punkt auf dem Rand. Gibt es dann immer einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ von z nach w mit $\gamma([0, 1)) \subset G$, d.h. der bis auf den Endpunkt in G verläuft?