6. Blatt zur Funktionentheorie
Abgabe: 25.–26.05.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Berechne
$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz \qquad , \qquad \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \quad .$$

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Zeige
$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = 2\pi i\,\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \quad , \qquad \text{falls } \; r > \max\{|z_1|, |z_2|\} \; .$$
Was gilt für $z_2 \to z_1$?

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$ mit $\overline{D_r(a)} \subset G$. Zeige:
Ist $|f(a)| < \min\left\{|f(z)| \,\big|\, |z-a| = r\right\}$, dann hat f eine Nullstelle in $D_r(a)$.

(b) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Zeige, daß $|f'(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|} \leq \dfrac{1}{(1-|z|)^2}$ in $\mathbb{D}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei γ eine geschlossene glatte Kurve und $n(\gamma, z)$ die Windungszahl. Zeige:

(a) $n(\gamma, z) = 0$ für alle z in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

(b) Ist $z \notin |\gamma|$ und $\widetilde{\gamma}(t) = z + \frac{\gamma(t)-z}{|\gamma(t)-z|}$, dann gilt $n(\gamma, z) = n(\widetilde{\gamma}, z)$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \in G$ und $r > 0$ so, daß $D := D_r(a) \subset G$. Zeige:
$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) \right| \leq \|f' - f'(a)\|_D \qquad \text{für alle } \; z, w \in D\,, \; z \neq w\,.$$
Folgere: Sind $z_n \neq w_n$ zwei Folgen, die gegen a konvergieren, dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-f(w_n)}{z_n-w_n} = f'(a) \; .$$
Ist $f'(a) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung U von a, in der f injektiv ist.