7. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 08.–09.06.09 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Zeige, daß

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \ .$$

Wann gilt Gleichheit?

(b) Sei $f : \mathbb{D} \to G$ biholomorph. Zeige, daß

$$|f'(0)| \geq \operatorname{dist}(f(0), \partial G) \ .$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Sei D ein Gebiet und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

$$\text{(i)} \qquad f \cdot g \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0 \text{ oder } g \equiv 0 \ ,$$

$$\text{(ii)} \qquad f^2 \equiv g^2 \quad \Rightarrow \quad f \equiv g \text{ oder } f \equiv -g \ .$$

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{2n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$?

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
Zeige, daß $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(d) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 - e^{1/z}$. Finde eine injektive Folge (z_n), so daß $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist dies ein Widerspruch zum Identitätssatz?

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\limsup\limits_{z \in \mathbb{D}, z \to \zeta} |f(z)| \leq 1 \quad \forall\, |\zeta| = 1, \zeta \neq 1$.
Ist f beschränkt?

(b) Sei f holomorph in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$. Ist $|f(z)| \equiv c$ konstant auf $\partial\mathbb{D}$, dann ist f eine rationale Funktion.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Für $0 < \rho < r$ sei $M_\rho = \max\limits_{|z|=\rho}\{|f(z)|\}$. Zeige, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq M_\rho^2$.

Beweise damit das Maximumprinzip.