SoSe 09 Marinescu / Erat

8. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 15.–16.06.09 in den Übungen

1. Aufgabe (3 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f = \lambda \cdot g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Sei f eine nicht–konstante ganze Funktion. Dann liegt $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ dicht.

(c) Bestimme alle ganzen Funktionen f mit $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, daß es keine biholomorphe Abbildung $\{0 < |z| < 1\} \to \{r < |z| < 1\}$ geben kann, wenn $r > 0$.

(b) Bestimme jeweils die Art der Singularität im Nullpunkt von

$$\text{(i)} \quad \frac{z}{e^z - 1} \qquad , \qquad \text{(ii)} \quad z \cot z \quad .$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige:

(a) (i) Jede meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist rational.
(ii) Eine meromorphe Funktion f in $\mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ ist rational.

(b) Sei $f \not\equiv 0$ eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und $D = N(f) \cup P(f)$ die Menge der Null– und Polstellen von f in $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt $\sum\limits_{z \in D} \mathrm{ord}_z f = 0$.

(c) Seien $z_1, \ldots, z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, und seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ so, daß $m_1 + \ldots + m_n = 0$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f auf $\widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$\mathrm{ord}_z f = \begin{cases} m_j & , \quad \text{falls } z = z_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & , \quad \text{falls } z \notin \{z_1, \ldots, z_n\} \end{cases} .$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

(i) Sei G ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial G} \limsup_{G \ni w \to \zeta} |f(w)| \quad \forall\, z \in G .$$

(ii) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 3(a), Blatt 7. Zeige:
Ist f beschränkt, dann ist $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.