SoSe 09 Marinescu / Erat

# 9. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 22.–23.06.09 in den Übungen

## 1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Entwickle $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ in eine Laurent–Reihe in

(i) $A_1 = \{0 < |z| < 1\}$ , (ii) $A_2 = \{1 < |z| < 2\}$ .

(b) Bestimme den Hauptteil von $\cot^2 z$ um den Nullpunkt.

## 2. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Seien $f_n, f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k$ , $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Zeige: Konvergiert $f_n \to f$ lokal gleichmäßig, dann $a_k^{(n)} \to a_k$ $_{(n\to\infty)}$ $\forall\, k$ .
Gilt auch die Umkehrung?

(b) Sei $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ . Zeige, daß $\zeta$ in $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert.

## 3. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Sei $G$ ein Gebiet und seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei in $G$. Konvergiert $f_n$ lokal gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ und ist $f \not\equiv 0$, dann hat auch $f$ keine Nullstelle in $G$.

(b) Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion und $D = D_r(a) = \{|z-a| < r\}$ eine Kreisscheibe, auf deren Rand $\gamma = \partial D$ keine Null– oder Polstelle von $f$ liegt. Dann gilt

$$n(f\circ\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in D} \operatorname{ord}_z f = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, b_j) - \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, c_j) \ ,$$

wobei $b_j$ die Nullstellen und $c_j$ die Polstellen von $f$ mit Vielfachheit sind.

## Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

(a) Sei $p$ ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $p'(0) = 1$, also $p(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$. Ist $p'(z) \neq 0$ für alle $|z| < 1$, dann gilt $|a_n| \leq 1/n$.

(b) Sei $p$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ mit nur einfachen Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$, d.h. sie sind paarweise verschieden und $p'(z_j) \neq 0$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p'(z_j)} = 0 \ .$$