

10. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: 29.–30.06.09 in den Übungen

Hinweis:

Für die Klausurzulassung müssen mindestens 60 Punkte aus den Übungsblättern 1–10 erreicht werden.

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei f meromorph in $a \in \mathbb{C}$.

- (a) Ist a Polstelle erster Ordnung, dann gilt $\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.
- (b) Ist a eine einfache Nullstelle von f , dann gilt $\operatorname{res}_a \frac{1}{f} = 1/f'(a)$.

Hat f in ∞ eine isolierte Singularität, so definiert man $\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} f(z) dz$, wobei der Radius der Kreisscheibe so groß gewählt wird, daß f keine weitere Polstelle im Komplement der Kreisscheibe hat. Zudem sei wie üblich $n(\partial D_R, 0) = 1$.

- (c) Dann gilt $\operatorname{res}_\infty f = -\operatorname{res}_0 \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}(z) = z^{-2}f(\frac{1}{z})$.
- (d) Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion. Dann gilt $\sum_{p \in \hat{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_p f = 0$.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

- (a) Sei f nicht-konstant und holomorph in $a \in \mathbb{C}$.
Dann gilt $\nu_f(a) = n \iff \operatorname{ord}_a f' = n - 1$.
- (b) Sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein nicht-konstantes Polynom, d.h. $\operatorname{grad} p = n \geq 1$.
Dann gilt

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (\nu_p(z) - 1) = n - 1.$$

3. Aufgabe

(4 Punkte)

- (a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen von

$$f(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i \quad \text{in} \quad \{1 < |z| < 2\}.$$

- (b) Sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter habe f in z_0 eine k -fache w_0 -Stelle, $1 \leq k < \infty$. Dann gibt es Umgebungen $V \subset G$ von z_0 und W von w_0 , so daß jedes $w \in W \setminus \{w_0\}$ genau k verschiedene Urbilder $z_1, \dots, z_k$ in V hat, und zwar mit $\nu_f(z_j) = 1$ für $j = 1, \dots, k$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe

(+ 8 Punkte)

Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G \rightarrow H$ holomorph. Dann sind äquivalent:

- (i) Ist $z_n \in G$ eine Folge ohne Häufungspunkt in G , dann hat die Folge $f(z_n)$ keinen Häufungspunkt in H .
Man nennt (z_n) auch *Randfolge* und schreibt $z_n \rightarrow \partial G$. Somit:
 $z_n \rightarrow \partial G \Rightarrow f(z_n) \rightarrow \partial H$, f bildet Randfolgen auf Randfolgen ab.
- (ii) Ist $K \subset H$ kompakt, so ist auch $f^{-1}(K)$ kompakt.
- (iii) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $N_f(w) \equiv k$ für alle $w \in H$. Dies bedeutet, jeder Wert $w \in H$ wird in G genau k -mal angenommen, $f : G \xrightarrow{k:1} H$.
(Tip: Aufgabe 3b)
- (iv) f ist surjektiv (also nicht-konstant) und bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.

Eine stetige Abbildung $f : G \rightarrow H$, die (ii) erfüllt, nennt man *eigentlich*.

Eine holomorphe Abbildung $f : G \rightarrow H$, die (i) erfüllt, nennt man *endlich*.

Die Fachschaft informiert:

Am Fr. 26.6.09 veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest! Im Hof des Mathematischen Instituts wird ab 18 Uhr gegrillt und für Getränke ist auch gesorgt. Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch! Eure Fachschaft