

11. Blatt zur Funktionentheorie

Abgabe: freiwillig in den Übungen

1. AufgabeSei f in \mathbb{D} holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Dann gilt:

- (i) Ist f gerade, d.h. $f(-z) = f(z)$, dann gilt $\operatorname{res}_z f = -\operatorname{res}_{-z} f$ für $z \in \mathbb{D}$; insbesondere $\operatorname{res}_0 f = 0$.
- (ii) Ist f ungerade, d.h. $f(-z) = -f(z)$, dann gilt $\operatorname{res}_z f = \operatorname{res}_{-z} f$ für $z \in \mathbb{D}$.

2. AufgabeSei G ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $S \subset G$ eine diskrete Teilmenge und f holomorph in $G \setminus S$. Dann gilt: f hat eine Stammfunktion in $G \setminus S$ genau dann, wenn alle Residuen (in G) von f verschwinden.**3. Aufgabe**Zeige, daß für $\lambda > 1$ die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.**4. Aufgabe**

Berechne folgende Integrale:

(a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \vartheta}{5 + 4 \sin \vartheta} d\vartheta$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} (\cos \vartheta)^n d\vartheta$$

(c)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$$

(d)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx \quad (a > 0)$$