SS 2012 Marinescu / Erat

1. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 16.–18.04.12 in den Übungen

`http://www.mi.uni-koeln.de:8920`

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Berechne explizit die dritten Taylorpolynome in 0 zu den Funktionen

$$\sqrt{1+x}^{\,3} \quad , \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \text{und} \quad \sqrt[5]{1+x} \quad .$$

(b) Gebe Näherungen für $\log(0.9)$ und $\sin(91°)$ mit Fehlerabschätzung an, und zwar jeweils mit Hilfe eines geeigneten zweiten Taylorpolynoms und des Lagrange–Restgliedes.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Zeige, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Taylorreihe in x_0 dargestellt wird, d.h. bezeichnet $T_{x_0,n}$ das n-te Taylorpolynom der cos-Funktion in x_0, so gilt $T_{x_0,n}(x) \to \cos(x)$ für $n \to \infty$ und jedes $x \in \mathbb{R}$. (Tipp: Lagrange-Restglied)

(b) Berechne $T_{\frac{\pi}{4},2}$ und zeige, dass dieses Polynom auf $\left[\frac{\pi}{4} - 0.1\,,\,\frac{\pi}{4} + 0.1\right]$ von cos um weniger als einen Fehler von $2 \cdot 10^{-4}$ abweicht.

3. Aufgabe (4 + 4 Punkte)

Beweise:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x(1-x)^n$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(b) $g_n := n \cdot f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion. (Tipp: $g_n(\frac{1}{n}) = \ ?$)

Sei $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h_n(x) := nxe^{-nx^2}$.

(c) Konvergieren die h_n punktweise? Falls ja, gegen welche Funktion?

(d) Auf welchen abgeschlossenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ konvergieren die h_n gleichmäßig?

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$, und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$, $g_n : D \to \mathbb{C}$ zwei Folgen von Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ bzw. $g : D \to \mathbb{C}$ konvergieren. Zeige:

(a) Die Funktionenfolge $f_n + g_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

(b) Falls die f_n, g_n beschränkte Funktionen sind, so konvergiert die Funktionenfolge $f_n \cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$. (Tipp: Es gibt eine *gemeinsame* Schranke für alle $|f_n|$, warum?)