2. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 23.–25.04.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, dass ein Polynom durch seine Taylorreihe in einem beliebigen Punkt x_0 auf $\mathbb{R}$ darstellbar ist.

(b) Zeige mit Hilfe des Satzes über Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation bei Potenzreihen, dass $\cos' x = -\sin x$ und $\sin' x = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige, dass für $x \in (-1, 1)$ gilt:

(a) $\arctan x \;=\; x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} \pm \;\ldots$

(b) $\arcsin x \;=\; x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \;\ldots$

Anleitung: Entwickle jeweils zunächst die *Ableitung* der genannten Funktionen in eine Potenzreihe (man braucht dazu übrigens nicht auf die Definition der Taylorreihe zurückzugreifen).

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $I = (a, b)$, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$.

(a) Zeige: $f(x) + f'(x)(y - x) < f(y)$ für alle $x \neq y$ in I.
Was bedeutet dies geometrisch?

(b) Folgere: (i) $e^y > 1 + y$ für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(ii) $\alpha x^{\alpha-1}(x - y) > x^\alpha - y^\alpha > \alpha y^{\alpha-1}(x - y)$ für alle $x \neq y$ in $\mathbb{R}_+$ und $\alpha > 1$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Zeige:

(a) $\dfrac{\pi}{4} \;=\; 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} \pm \;\ldots$ (Leibnizsche Reihe für π)

(b) $\dfrac{\pi}{2} \;=\; 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{1}{7} + \;\ldots$