3. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 30.04.–02.05.12 in den Übungen

Hinweis: Es gibt zwei zusätzliche Proseminare.

Prof. Friedl: `http://www.mi.uni-koeln.de/~stfriedl/proseminar-knotentheorie-2012.pdf`

Prof. Sweers: `http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/unterricht.html`

1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ eine Regelfunktion und $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine stetige konvexe Funktion. Dann gilt

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(\varphi\circ f\big)(x)\,dx\ .$$

(ii) Sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ eine Regelfunktion und $p > 1$. Zeige, dass

$$\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\Big)^p \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)\,dx\ .$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass f in jedem kompakten Teilintervall von I eine Lipschitz–Bedingung erfüllt und damit in I stetig ist.

(b) Ist jede konvexe Funktion stetig?

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X. Zeige, dass dann auch $d(x,y) := \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ eine Metrik auf X ist.
Freiwilliger Zusatz:
Für "min" statt "max" gilt das nicht immer; finde Gegenbeispiele auf $X = \mathbb{R}^2$.

(b) $(X_1\,, d_1)$ und $(X_2\,, d_2)$ seien metrische Räume. Für $x, y \in X_1 \times X_2$ sei $d(x,y) := \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$. Zeige, dass d eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ ist.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in M$ stets auch die Verbindungsstrecke $\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1]\}$ in M enthalten ist. Zeige:

(a) Ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist $\overline{B}_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ konvex.

(b) Umgekehrt: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und (bzgl. der euklidischen Standardmetrik) abgeschlossen und beschränkt. Weiterhin sei K punktsymmetrisch (d.h. mit $x \in K$ sei stets auch $-x \in K$), und es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $\leq \varepsilon$ in K liegen. Dann ist durch

$$\|0\| := 0 \qquad \text{und} \qquad \|x\| := \frac{1}{\max\{t \in \mathbb{R} \mid tx \in K\}} \quad \text{für } x \neq 0$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert, und $\overline{B}_1(0) = K$.
Tipp: $\frac{1}{r^{-1}+s^{-1}}(x+y) = \frac{s}{r+s}rx + \frac{r}{r+s}sy\,.$