SS 2012 Marinescu / Erat

4. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 07.–09.05.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Normen $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$, $\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ und $\|z\|_1 = |z_1| + \ldots + |z_n|$ auf $\mathbb{C}^n$. Finde maximale Konstanten c_n, c'_n und minimale Konstanten C_n, C'_n mit

(a) $c_n\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C_n\|\cdot\|_\infty$, (b) $c'_n\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C'_n\|\cdot\|_1$.

2. Aufgabe (4 + 2 Punkte)

Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, definiere $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$.

(a) Zeige, dass $d(A,B) := \|A - B\|_2$ eine Metrik auf $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ definiert.

(b) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, eine Folge in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeige, dass

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \text{ für alle } 1 \leqslant i,j \leqslant n .$$

Folgere, dass $(M_{n\times n}(\mathbb{C}), d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

(c) Beweise, dass $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(d) Zeige, dass für jedes $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Reihe $\exp(A) := \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k$ konvergiert.

(e) Berechne $\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

(f) Zeige: Wenn $AB = BA$, dann $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$, und sei $V = \mathcal{C}_b^0(D, \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$–Vektorraum der stetigen beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass V mit der von der Supremumsnorm $\|\cdot\|_D$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist.

(b) Sei $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_1$ die durch $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ definierte Norm auf V. Ist V mit der induzierten Metrik vollständig?

Tipp: Betrachte $f_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f_n = 0$ auf $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, $f_n = 1$ auf $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ und linear auf $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$; zeige, dass $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, die nicht konvergiert. Würde ein Grenzwert $f \in V$ existieren, so könnte man zeigen, dass $f = 0$ auf $[0, \frac{1}{2})$, $f = 1$ auf $(\frac{1}{2}, 1]$, so dass f nicht stetig sein könnte.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}^1([0,1])$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Definiere

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad , \quad \|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad , \quad |||f||| = |f(0)| + \|f'\| \ .$$

(a) Zeige, dass $|||\cdot|||$ eine Norm ist.

(b) Zeige, dass eine konvergente Folge bzgl. $\|\cdot\|$ auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergiert und dass eine konvergente Folge bzgl. $|||\cdot|||$ auch bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert.

(c) Untersuche die Konvergenz der Folgen $f_n(t) = t^n$ und $g_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$ bzgl. der drei Normen. Sind diese Normen äquivalent?