

5. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 14.–16.05.12 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $p \geq 1$, und sei ℓ^p die Menge aller Folgen $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} mit der Eigenschaft, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^p$ konvergiert. Zeige:

(a) Mit $z, w \in \ell^p$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ liegen auch $z + w$ und λz in ℓ^p , wobei Addition und Multiplikation mit Skalaren gliedweise definiert sind. (Insbesondere ist ℓ^p ein \mathbb{C} -Vektorraum.)

(b) Durch $\ell^p \ni z = (z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \mapsto \|z\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^p \right)^{1/p}$ ist eine Norm auf ℓ^p gegeben.

(c) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$. Es seien $\overset{\circ}{M}$ (Menge der inneren Punkte von M), \overline{M} (Menge der Berührungspunkte) und ∂M (Menge der Randpunkte) definiert wie in der Vorlesung. Zeige:

(a) $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.

(b) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $N \subset Y$, so gilt bzgl. der Produkttopologie auf $X \times Y$:

$(M \times N)^\circ = \overset{\circ}{M} \times \overset{\circ}{N}$, $\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$, $\partial(M \times N) = (\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N)$.

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Finde die Stetigkeitsstellen folgender Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

(a) Gebe einen Homöomorphismus zwischen dem offenen Halbstreifen $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ und der geschlitzten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ an (mit Beweis).

(b) Gebe einen Homöomorphismus zwischen der geschlitzten und der ungeschlitzten Ebene an.