SS 2012 Marinescu / Erat

6. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 21.–23.05.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Dann ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A$ durch die Metrik d auf A induziert.

(ii) Sind $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, so ist die Produkttopologie der induzierten Topologien $\mathcal{O}(d_1), \ldots, \mathcal{O}(d_n)$ induziert durch die Metrik

$$d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} \ .$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ausgehend vom kompakten Intervall $I = [0, 1]$ nehmen wir aus diesem nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird das mittlere Drittel $I_{11} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste das mittlere Drittel $I_{21} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ bzw. $I_{22} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, darauf aus jedem der verbleibenen vier Reste das mittlere Drittel I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34} usw.

(a) Sei G die Vereinigung aller I_{ij}, $i = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$. Zeige, daß die Restmenge $C = I \setminus G$ kompakt ist. Sie wird als *Cantorsche Menge* bezeichnet.

(b) Zeige, daß C nirgends dicht ist (d.h. jedes Intervall ein zu C disjunktes Intervall enthält).

3. Aufgabe (4 + 2 Punkte)

(a)

(i) Sei X ein topologischer Raum. Zeige:
  (a) Ist $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist A kompakt.
  (b) Ist X ein Hausdorff–Raum und $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.

(ii) Zeige:
  (a) Ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums ist vollständig.
  (b) Ein vollständiger Unterraum eines normierten Raums ist abgeschlossen.

(b) $U(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid AA^* = E_n\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$; dabei sei E_n die Einheitsmatrix und $A^* = \overline{A}^{\top} = (\overline{a}_{ji})$ für $A = (a_{ij})$.

(c) Ist X kompakt, Y ein Hausdorff–Raum und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein Homöomorphismus.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Zeige:

(i) Sei $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen.
Ist T injektiv und $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ stetig, so gilt:
(a) $\operatorname{Im} T$ ist abgeschlossen in Y, (b) es gibt Konstanten $0 < m \leq M$ mit $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \;\; \forall\, x \in X$ und es gilt $\|T^{-1}\| = \left(\inf_{\|x\|=1} \|Tx\|\right)^{-1}$.

Hinweis: Für die Operatornorm gilt $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

(ii) Ist X ein Banachraum und U ein abgeschlossener Unterraum, so ist X/U ein Banachraum.

Der Quotientenvektorraum X/U wird so definiert: Ist U ein Unterraum von X, so definiert die Äquivalenzrelation $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in U$ den Quotientenvektorraum X/U als die Menge der Äquivalenzklassen $[x] = \{\, y \in X \mid y \sim x \,\} = x + U$ mit den Verknüpfungen $[x] + [y] := [x + y]$ und $\lambda[x] := [\lambda x]$.

Sei X nun ein normierter Raum. Dann definiert $\|[x]\| := d(x, U)$ eine Halbnorm auf X/U. Ist U ein abgeschlossener Unterraum, dann ist X/U ein normierter Raum.
Es gilt $\|[x]\| = d(x, U) = \inf_{u \in U} \|x - u\| = \inf\{\, \|y\| \mid y \in x + U \,\}$.