SS 2012 Marinescu / Erat

7. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 04.–06.06.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ folgenkompakt. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Zeige:

(a) Es existiert $r > 0$, so dass es zu jedem $x \in K$ ein $i \in I$ mit $B_r(x) \subset U_i$ gibt.

(b) Zu jedem $r > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_k$ in K mit $K \subset B_r(x_1) \cup \ldots \cup B_r(x_k)$.

Bemerkung:
Dies zeigt, dass folgenkompakte Teilmengen metrischer Räume kompakt sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, und sei $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Teilmengen von X mit der Eigenschaft $M_k \cap M_{k+1} \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Ist jedes M_k wegzusammenhängend, so auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$.

(b) Ist jedes M_k zusammenhängend, so auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ die n–Sphäre. Zeige, dass zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ existiert mit $f(x) = f(-x)$.

Beispiel: Zu jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, an denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.

Zusatzaufgabe *(Lemma von Riesz)* (+ 4 Punkte)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq V$ ein abgeschlossener Unterraum.

(i) Für $v \in V$ definiere den Abstand von v zu U durch

$$d(v, U) = \inf\{\, \|u - v\| \mid u \in U\} \;.$$

Zeige, dass $d(v, U) > 0$, falls $v \notin U$.

(ii) Sei $\delta > 0$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $d(v, U) \geq 1 - \delta$.

(iii) Sei $W \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum, d.h. $\dim W < \infty$.
Zeige, dass W abgeschlossen ist.

(iv) Die Einheitskugel $B = \{\, v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ ist genau dann kompakt, wenn $\dim V < \infty$.