8. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 11.–13.06.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1\, x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

Zeige, dass f stetig ist und für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $y \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} = g(x, y) \qquad (*)$$

existiert, aber dass die Abbildung $y \mapsto g(0, y)$ nicht linear ist (so dass f im Punkt 0 nicht differenzierbar sein kann).

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3\, x_2}{x_1^4 + x_2^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass f stetig ist und dass der Limes $g(x, y)$ in $(*)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $y \in \mathbb{R}^2$ existiert und dass $y \mapsto g(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ linear ist, aber f im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme jeweils die Ableitung der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, wobei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ und $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = \|x\|^\lambda x$, für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Für welche λ läßt sich g zu einer auch in $x = 0$ differenzierbaren Abbildung fortsetzen? Ist die Fortsetzung sogar in der Klasse $\mathcal{C}^1$?

(iii) $A : \mathbb{R} \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, wobei die Koeffizienten $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

(iv) $C : \mathbb{R} \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $C(t) = A(t)B(t)$, wobei $A, B : \mathbb{R} \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$ differenzierbar sind.

Nehme an, $B(t)$ sei invertierbar für jedes $t \in \mathbb{R}$. Zeige für $A(t) = B(t)^{-1}$, daß

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}\right) = -A(t)^{-1} \cdot \frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1} .$$

(bitte wenden)

3. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, daß $f_k : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f_k(A) = A^k$, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung ist und $df_k(A)\cdot B = \sum_{j=0}^{k-1} A^j B A^{k-1-j}$.

(ii) Zeige, daß die Abbildung $\exp : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, von der Klasse $\mathcal{C}^1$ ist, und berechne $d\exp(0)$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Zeige:

(a) $df(tx) = t^{\alpha-1} df(x)$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) $df(x)\cdot x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (*Eulersche Identität*)