9. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 18.–20.06.12 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Sei $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der invertierbaren Elemente in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.
Die Operatornorm ist definiert als $\|T\| = \sup\{\|Tv\| \mid \|v\| \leqslant 1\}$.

(a) Sei $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $\mathrm{Id} - T$ invertierbar ist, falls $\|T\| < 1$, und die Umkehrabbildung durch die konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ dargestellt wird.

(b) Seien $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und $T_0 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $\|TT_0^{-1} - \mathrm{Id}\| < 1$, falls $\|T - T_0\| < 1/\|T_0^{-1}\|$. Folgere, dass die offene Kugel in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit Mittelpunkt T_0 und Radius $1/\|T_0^{-1}\|$ nur aus invertierbaren Elementen besteht.

(c) Seien $T, S \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$ und dass die Abbildung $\varphi : \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto T^{-1}$, stetig ist.

(d) Zeige, dass φ stetig differenzierbar ist und seine Ableitung durch $d\varphi(T) \cdot H = -T^{-1} \cdot H \cdot T^{-1}$ für alle $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $H \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ gegeben ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)\ ,$$

(a) $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt) und sind stetig; insbesondere ist f differenzierbar;

(b) $\partial_{12} f(0,0)$ und $\partial_{21} f(0,0)$ existieren, sind aber nicht gleich.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *Laplace-Operator* $\Delta : C^2(U,\mathbb{R}) \to C^0(U,\mathbb{R})$ ist definiert durch $\Delta f := \partial_{11} f + \ldots + \partial_{nn} f$. Wir betrachten nun $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Funktion $r : U \ni x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(a) Berechne die Gradienten $\mathrm{grad}(r^{2-n})(x)$ und $\mathrm{grad}(\log r)(x)$.

(b) Zeige: $\Delta(r^{2-n}) = 0$; im Falle $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeige, dass mit $F := f \circ P \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}F + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}F + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}F\Big)(r,\phi) = \big(\Delta f\big)(P(r,\phi))\ .$$