SS 2012 Marinescu / Erat

10. Blatt zur Analysis II

Abgabe: 25.–27.06.12 in den Übungen

Hinweis:
Für die Klausurzulassung müssen mindestens 60 Punkte aus den Übungsblättern 1–10 erreicht werden.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ sowie die zugehörige Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die sich daraus nach der üblichen Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ergibt; diese ist ein $\mathbb{R}^2$–wertiges Polynom, insbesondere $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(a) Sei P die Polarkoordinatenabbildung und $F := f \circ P$. Berechne $F(r, \phi)$.

(b) Zeige $\Delta f_i = 0$ für $i = 1, 2$.

Hinweis: Zusatzaufgabe Blatt 9; Vorsicht, P nicht surjektiv.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechne für $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x^y \in \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen $\partial_{j_1 j_2 j_3} f(x, y)$ dritter Ordnung. Stelle dann das Taylorpolynom dritten Grades zu f mit Entwicklungspunkt $(1, 1)$ auf.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, (b) $g(x, y) = \cos x \cdot \cosh y$.

Zusatzaufgabe (+ 6 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F = (F_1, \dots, F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Die Funktion

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

heißt *Divergenz* des Vektorfeldes F.

(a) Sei $u : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass

$$\operatorname{div}(uF) = \langle \operatorname{grad} u, F \rangle + u \operatorname{div} F \ .$$

Berechne $\operatorname{div}(x/\|x\|)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \qquad , \qquad \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \ .$$

(c) Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass

$$\Delta h(\|x\|) = h''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} h'(\|x\|) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ .$$