SS 2012 Marinescu / Erat

11. Blatt zur Analysis II

(wird in den Übungen besprochen)

1. Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt: Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

2. Aufgabe

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *gleichmäßig stetig*

$$:\Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \quad d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon\ .$$

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann gilt: Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

3. Aufgabe

Beweise, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius 1 hat, und für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\ .$$

4. Aufgabe

Betrachte $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Konvergiert f_n gleichmäßig auf

(a) $[0,\infty)$? (b) $[1,\infty)$? (c) $[a,b] \subset (0,\infty)$?

(bitte wenden)

5. Aufgabe
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 - xy + 4y^2 \in \mathbb{R}$ und das Innere $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ einer Ellipse.

(a) Bestimme die lokalen Extrema von f auf E.

(b) Parametrisiere den Rand von E durch eine Kurve c und bestimme die lokalen Extrema von $f|_{\partial E}$ durch Betrachtung derer von $f \circ c$.

(c) Wo nimmt f auf der abgeschlossenen Ellipse $\overline{E}$ sein Minimum und Maximum an? Hat $f|_{\overline{E}}$ noch andere lokale Extrema als diese?

6. Aufgabe
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := \big(2e^x - x^2,\, e^y + (x^2 + 1)y\big)$. Zeige:

(a) f ist bijektiv.

(b) f ist ein C^∞–Diffeomorphismus. Was ist $d(f^{-1})(2, 1)$?

7. Aufgabe
Sei $U = \{\, (r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0 \,\}$ und

$$P : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad P(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \cos\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\varphi) \ .$$

(a) Zeige, dass P stetig differenzierbar ist, und bestimme die Menge der Punkte, in denen P lokal invertierbar ist.

(b) Bestimme die Ableitung einer lokalen Umkehrabbildung von P.

(c) Zeige, dass P auf $U_0 = (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ invertierbar ist, und bestimme die Umkehrabbildung. Bilde die Ableitung der Umkehrabbildung und verifiziere das Ergebnis aus (b).

8. Aufgabe
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + i/4$. Finde eine Kreisscheibe, auf der f kontrahierend ist. Sei $z_1 = 0$ und $z_{n+1} = f(z_n)$. Untersuche, ob die Folge (z_n) konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.