1. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 27.10.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} = B_1(0)$, und $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch $f(x) := x/(1 - \langle x, x\rangle)$. Zeige, daß f ein C^∞–Diffeomorphismus ist.
(Tip: Leicht für $f|_{B_1(0)\setminus\{0\}}$; Umkehrsatz nahe 0.)

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$. Zeige:

(a) f ist eine injektive Immersion.

(b) f ist keine Einbettung.

(c) $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0\}$.

(d) $\mathrm{Im}(f)$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, aber $\mathrm{Im}(f) \setminus \{(0, 0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2$.
Bestimme die regulären und kritischen Werten von f. Skizziere die Niveaumengen $f^{-1}(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Welche topologische Eigenschaft von $f^{-1}(c)$ ändert sich, wenn c einen kritischen Wert durchläuft?

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Die Kugelkoordinatenabbildung des $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch
$P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (r, \phi, \psi) \mapsto (r \cos\phi \cos\psi,\ r \sin\phi \cos\psi,\ r \sin\psi) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Skizziere die folgenden Kurven:
  (i) $[0, 2\pi] \ni \phi \mapsto P(1, \phi, \psi)$ für ein festes $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
  (ii) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni \psi \mapsto P(1, \phi, \psi)$ für ein festes $\phi \in [0, 2\pi]$.

(b) Wir fassen nun die Einheitssphäre S^2 als die Erdoberfläche mit Nordpol $(0, 0, 1)$ und Nullmeridian $\{(x, 0, z) \in S^2 \mid x \geqslant 0\}$ auf. Seien $\phi \in (-\pi, \pi]$ und $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Was ist dann die geographische Länge bzw. Breite des Punktes $P(1, \phi, \psi)$?

(c) Berechne die Jacobimatrix $J_P(r, \phi, \psi)$. Für welche Punkte (r, ϕ, ψ) ist ihr Rang maximal? Welche anderen Werte nimmt der Rang an und in welchen Punkten? Wo liegen die zugehörigen Bildpunkte? (Tip: Die Spalten der Matrix sind orthogonal.)

(d) Zeige, daß $P : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geqslant 0\}$ ein C^∞–Diffeomorphismus ist.