WS 08/09 Marinescu / Erat

2. Blatt zur Vorlesung Analysis III
Abgabe: 03.11.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $r > 0$. Zeige, daß

$$\psi : (0, 2\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \ni (\phi, \theta) \mapsto (r \cos\phi \cos\theta,\ r \sin\phi \cos\theta,\ r \sin\theta) \in \mathbb{R}^3$$

eine (lokale) Parametrisierung der 2-Sphäre $S_r^2 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r\}$ vom Radius r in $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, daß der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Gebe lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder überdecken.

(c) Beweise, daß das Katenoid $M = \{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Stelle das Katenoid als Lösungsmenge einer unabhängigen Gleichung dar.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine C^∞–Funktion. Beweise, daß die Rotationsfläche $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, daß der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist aber $K \setminus \{0\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) Zeige, daß die Neilsche Parabel $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ Untermannigfaltigkeiten von Dimension n_1 bzw. n_2. Seien $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ und $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ Atlanten für M_1 bzw. M_2. Zeige, daß $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ eine $(n_1 + n_2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ und $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j) : i \in I, j \in J\}$ ein Atlas für $M_1 \times M_2$ ist. (Für $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^{n_2}$ ist $\varphi_j \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ definiert durch $(\varphi_i \times \psi_j)(x, y) = (\varphi_i(x), \psi_j(y))$.)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Zeige, daß die stereographischen Projektionen einen Atlas auf S^n bilden, und berechne den Kartenübergang.