WS 08/09 Marinescu / Erat

3. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 10.11.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum und den Normalenraum an einen beliebigen Punkt des Zylinders und des Katenoids.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine glatte positive Funktion, und seien

$$M_f := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = f(z)^2 \}$$

eine durch f definierte Rotationsfläche und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ ein Zylinder. Sei $F : M_f \to Z$ die Abbildung

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{1}{f(z)}\, y\,,\ \frac{1}{f(z)}\, x\,,\ z + 1 \right) .$$

(a) Was bedeutet diese Abbildung geometrisch?

(b) Zeige, daß F ein Diffeomorphismus zwischen den Flächen M_f und Z ist, d.h. $F : M_f \to Z$ ist bijektiv, F und F^{-1} sind glatt.

(c) Sei $p = (x, y, z) \in M_f$. Zeige, daß $v = (-y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor an M_f im Punkt p ist, und bestimme den Bildvektor $dF(p) \cdot v \in T_{F(p)}Z$.

(d) Veranschauliche v und $dF(p) \cdot v$ in einer Skizze.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei S^2 die 2–dimensionale Sphäre vom Radius 1 im $\mathbb{R}^3$. Betrachte die Abbildungen $X, Y : S^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0) \quad , \qquad Y(x, y, z) = (-z, 0, x) \ .$$

(a) Zeige, daß X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind. Skizziere diese Vektorfelder.

(b) Gebe die Komponenten von X und Y bzgl. der durch die sphärischen Koordinaten (Blatt 2, 1(a)) gegebenen kanonischen Basis an.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Identifiziere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und betrachte die stereographische Projektion $p_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$.

Definiere

$$f : S^2 \to S^2 \quad , \qquad f(x) = \begin{cases} p_N^{-1} \circ P \circ p_N(x) & , \quad x \neq N \\ N & , \quad x = N \end{cases} .$$

Zeige, daß $f \in C^\infty(S^2, S^2)$.