

#### 4. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 17.11.2008 in den Übungen

##### 1. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  und  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $f = F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige, daß  $\text{grad } f(x)$  die orthogonale Projektion von  $\text{grad } F(x)$  auf  $T_x M$  ist.

(b) Sei  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x_3$ , die Höhenfunktion auf der Sphäre  $S^2$ .

Berechne  $\text{grad } f$  (z.B. mit Hilfe von (a)).

##### 2. Aufgabe

(4 Punkte)

Es bezeichne  $p_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stereographische Projektion aus dem Nordpol.

(a) Sei  $v \in T_x S^n$ , wobei  $x \neq N$ . Vergleiche die Länge des Vektors  $v$  im Euklidischen Vektorraum  $(T_x S^n, g_x)$  mit der Länge des Bildvektors  $dp_N(x) \cdot v$  im Euklidischen Vektorraum  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

(b) Seien  $v, w \in T_x S^n$ , wobei  $x \neq N$ . Vergleiche den Winkel zwischen  $v, w$  in  $(T_x S^n, g_x)$  mit dem Winkel der Bildvektoren  $dp_N(x) \cdot v, dp_N(x) \cdot w$  in  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

##### 3. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) Es sei  $X : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Vektorfeld  $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ . Zeige, daß es keine glatte Funktion  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß  $X = \text{grad } f$ .

(b) Gebe den Gradienten einer Funktion  $f \in C^\infty(S^n)$  in der durch die stereographische Projektion gegebenen Karte  $(S^n \setminus \{N\}, p_N)$  an.

##### Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(e^{it}) = e^{ikt}$ , wobei  $k \in \mathbb{N}$ .

Zeige, daß für jedes  $y \in S^1$  gilt:  $|f^{-1}(y)| = k$ . Sei  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Konstruiere explizit paarweise disjunkte Umgebungen  $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$  von  $x_1, \dots, x_k$  und eine Umgebung  $V$  von  $y$ , so daß  $f|_{U_{x_j}} : U_{x_j} \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist für jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

**Hinweis:** Die Fachschaft möchte Euch zu der Adventsparty am 28.11. ab 20 Uhr in den  $S^2$  des Mathematischen Instituts einladen. Wie immer mit lecker Kölsch, Glühwein und Musik. Wir freuen uns auf Euch! Eure Fachschaft