WS 08/09 Marinescu / Erat

5. Blatt zur Vorlesung Analysis III
Abgabe: 24.11.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)
(a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zeige, daß $D = \{ (x, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \,|\, x_{n+1} - f(x) \leq 0 \}$ eine glatt berandete Teilmenge von $M = U \times \mathbb{R}$ ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld.
(b) Sei $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 2 \}$ und $D = \{ (x, y, z) \in M \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Zeige, daß D eine glatt berandete Teilmenge von M ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld ν. Berechne $T_{(x,y,z)}\partial D$ mit Hilfe einer Parametrisierung von ∂D und überprüfe, ob $\nu(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}\partial D$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Die Viviani–Fläche D ist der Durchschnitt des Vollzylinders $Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \}$ mit der Sphäre $S^2_R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$. Finde die regulären und singulären Punkte von ∂D und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $\dim V = n$. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis und $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$. Für $v \in V$ definiere $v \lrcorner\, \omega \in \Lambda^{n-1}V^*$ durch $v \lrcorner\, \omega(v_1, \dots, v_{n-1}) := \omega(v, v_1, \dots, v_{n-1})$ (inneres Produkt von ω mit dem Vektor v, man schreib auch $i_v\omega = v \lrcorner\, \omega$).
(a) Zeige, daß für $v \in V$ gilt

$$v \lrcorner\, \omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \; e_1^* \wedge \dots \wedge \widehat{e_j^*} \wedge \dots \wedge e_n^*$$

und die Abbildungen $V \longrightarrow \Lambda^{n-1}V^*$, $v \mapsto v \lrcorner\, \omega$, ein Isomorphismus ist.
(b) Nehmen wir an, daß $\{e_1, \dots, e_n\}$ Orthonormalbasis für ein Skalarprodukt ist. Zeige, daß $V \longrightarrow \Lambda^1 V^*$, $u \mapsto \omega^u = \langle u, \cdot \rangle$, ein Isomorphismus ist, und es gilt
$\omega^u \wedge (v \lrcorner\, \omega) = \langle u, v \rangle \omega$, insbesondere $\omega^v \wedge (v \lrcorner\, \omega) = \|v\|^2 \omega$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit.
(a) Seien $A, B \subset M$, wobei A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeige, daß es $f \in C^\infty(M)$ gibt mit kompaktem Träger, so daß $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.
(b) Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$. Zeige, daß es eine offene Menge $W \supset M$ in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$, so daß $F|_M = f$. Falls M abgeschlossen ist, zeige, daß $W = \mathbb{R}^N$ gewählt werden kann.