6. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 01.12.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei V ein orientierter Skalarproduktraum, $\dim V = n$. Sei ω_V das Volumenelement. Für ein $(n-1)$-Tupel $(v_1, \dots, v_{n-1})$ aus V $(n \geqslant 2)$ definieren wir das Vektorprodukt $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ als der einzige Vektor $v \in V$ so, daß $\langle v, u \rangle = \omega_V(u, v_1, \dots, v_{n-1})$ für alle $u \in V$. Beweise die folgenden Eigenschaften des Vektorproduktes $v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$:

(i) $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \varepsilon(\sigma) v$ für alle $\sigma \in S_{n-1}$.

(ii) $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(iii) $v \neq 0$ genau dann, wenn $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. In diesem Fall ist $(v, v_1, \dots, v_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis.

(iv) $\|v\|^2 = G(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$.

(v) Sei $e = (e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt

$$v = \varepsilon(e) \det \begin{pmatrix} e_1 & \langle v_1, e_1 \rangle & \dots & \langle v_{n-1}, e_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n & \langle v_1, e_n \rangle & \dots & \langle v_{n-1}, e_n \rangle \end{pmatrix} ,$$

wobei $\varepsilon(e)$ das Vorzeichen der Basis e ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei ω eine 2–Form auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\omega(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \right) .$$

Berechne $P^*\omega$, wobei P die Kugelkoordinatenabbildung ist.

(b) Berechne das äußere Differential folgender Formen in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy \\ \omega_2 &= xy\, dx \wedge dy + 2x\, dy \wedge dz + 2y\, dx \wedge dz \\ \omega_3 &= z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz \end{aligned}$$

(bitte wenden)

3. Aufgabe (3 Punkte)

(a) Sei $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine geschlossene 1–Form auf $\mathbb{R}^2$. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $d\alpha = \omega$, wobei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(b) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $d\eta = y\,dx \wedge dy$, wobei $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

(c) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1–Form

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\ .$$

Beweise, daß ω geschlossen aber nicht exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Gebe eine (möglichst große) offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der ω exakt ist.

Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte)

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert als Bild der Funktion $f : (-1,1) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t,\vartheta) = (2\cos\vartheta + t\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta, 2\sin\vartheta + t\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta, t\sin\frac{\vartheta}{2})$. Zeige, daß M nicht orientierbar ist.