7. Blatt zur Vorlesung Analysis III
Abgabe: 08.12.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige: Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein glattes Einheitsnormalenfeld existiert, d.h. eine glatte Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu(x) \in N_x M$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$.
Tip:
Für eine positiv orientierte Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ setze $\nu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige, daß folgende Untermannigfaltigkeiten orientierbar sind. Wähle eine Orientierung und berechne jeweils eine lokale Darstellung der Volumenform.

(a) Bizylinderkurve $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 , \, y^2 + z^2 = 2 \}$.

(b) Rotationsfläche $R_f = \{ (f(z)\cos\varphi, f(z)\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \}$, wobei $f \in C^\infty((a, b))$ und $f > 0$.

(c) Wendelfläche $W = \{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \}$.

(d) Graph einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$: $G_f = \{ (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld.

(a) Zeige, daß $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

(b) Wir nehmen an, daß U sternförmig ist. Zeige:

(i) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} F = 0$ existiert ein Potential $h : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} h = F$.

(ii) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} F = 0$ existiert ein Vektorfeld $G \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} G = F$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 5 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Es sei $E = E(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld und $H = H(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld. Dabei bezeichnen wir die Punkte des $\mathbb{R}^3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und mit $t \in \mathbb{R}$ die Zeit. Die Operationen der Divergenz und Rotation auf die räumlichen Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$ der zeitabhängigen Vektorfelder bezeichnen wir mit div_x bzw. rot_x. Im Vakuum lauten die ersten Maxwellschen Gleichungen (bei geeigneter Normierung):

$$\operatorname{rot}_x E = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{div}_x H = 0 \; .$$

Wir definieren folgende 2–Form in $\mathbb{R}^4$:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{3} E_j(x,t)\, dx_j \wedge dt + H(x,t) \lrcorner\, \omega_{\mathbb{R}^3} \; , \quad \text{wobei} \;\; \omega_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \; .$$

(a) Zeige, daß die Maxwellschen Gleichungen äquivalent zu $d\Omega = 0$ sind.

(b) Sei $V \subset U \times \mathbb{R}$ ein sternförmiges Gebiet. Zeige, daß es ein magnetisches Vektorpotential $A = A(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^3)$ und ein skalares Potential $a = a(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\operatorname{rot}_x A = H \quad , \quad \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t} = E \; . \tag{$*$}$$

(c) Sei (a_0, A_0) eine Lösung von $(*)$. Zeige, daß alle andere Lösungen von der Form $(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi)$ sind, mit einer Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}$ (Freiheit der Eichung).

(d) Nehmen wir an, daß die Eichbedingung $\frac{\partial a}{\partial t} = \operatorname{div}_x A$ gilt. Zeige, daß A der Wellengleichung $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta_x A = 0$ genügt. Dabei wirken die Differentialoperatoren komponentenweise. (Tip: Zeige zuerst, daß $\operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x A + \Delta_x A = \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x A$, und nutze dabei eine weitere Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{rot}_x H = \frac{\partial E}{\partial t}$.)

(e) Sei (a_0, A_0) eine Lösung der Gleichung $(*)$ und $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_x \varphi = -\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div}_x A_0$. Beweise, daß $(a, A) = (a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi)$ die Eichbedingung erfüllt.