WS 08/09 Marinescu / Erat

8. Blatt zur Vorlesung Analysis III
Abgabe: 15.12.2008 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung.
(a) Zeige, daß für $F := f \circ P \in C^2(P^{-1}(U), \mathbb{R})$ gilt:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}F + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}F + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}F\Big)(r,\phi) = \big(\Delta f\big)(P(r,\phi)) \ .$$

(b) Zeige $\Delta(\log\|x\|_2) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, und $\Delta(\operatorname{Re} z^k) = \Delta(\operatorname{Im} z^k) = 0$ für alle $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatte Kurve.
(a) Zeige, daß es glatte Funktionen $r, \vartheta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\gamma(t) = (r(t)\cos\vartheta(t), r(t)\sin\vartheta(t)) \ .$$

Anleitung:
Sei $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Wähle $\vartheta_a \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(a) = (r(a)\cos\vartheta_a, r(a)\sin\vartheta_a)$ und definiere

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \int_a^t \frac{-y(s)x'(s) + x(s)y'(s)}{r(s)^2}\, ds \, .$$

(b) Zeige, daß $\vartheta(b) - \vartheta(a) = \int_\gamma \omega$, wobei ω die Windungsform ist. Die Zahl

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega$$

heißt die *Windungszahl* von γ um 0.
(c) Zeige, daß $W(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$, wenn γ geschlossen ist ($\gamma(a) = \gamma(b)$).
(d) Berechne $W(\gamma, 0)$ für $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t)\big)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne die abgeschlossenen Mengen der $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ die kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Q}_n$ die Menge der Quader im $\mathbb{R}^n$. Beweise, daß $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$(*)$ $\mathcal{A}^\mu := \{\, E \subset X \mid \exists A \in \mathcal{A}, \exists N \subset N_0 \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N_0) = 0, \text{ so daß } E = A \cup N \,\}$

Zeige: (a) Die Abbildung $\overline{\mu} : \mathcal{A}^\mu \to [0, \infty]$, $\overline{\mu}(E) := \mu(A)$, mit $E = A \cup N$ wie in $(*)$ ist wohldefiniert.
(b) $E \in \mathcal{A}^\mu \iff \exists\, E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \subset E \subset E_2$ und $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$.