

9. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 12.01.2009 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und \mathcal{B} eine σ -Algebra auf Y . Zeige:

- (a) $f_* \mathcal{A} = \{ B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ -Algebra auf Y .
- (b) $f^{-1} \mathcal{B} = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ ist eine σ -Algebra auf X .

2. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) Seien X, Y Mengen, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Dann gilt: $\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$.

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Beweise:

$A + x = \{ a + x \mid a \in A \}$ ist Lebesgue-meßbar und $\lambda_n(A) = \lambda_n(A + x)$.

(D.h. das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant.)

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Beweise:

Jede p -dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n ($p < n$) ist eine Nullmenge.

Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

Eine monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion, falls $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Sei λ_F das durch F definierte Lebesgue-Stieltjes-Maß. Zeige:

- (a) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$ eine Verteilungsfunktion, und es gilt $\lambda_{F_\mu}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mu$.
- (b) Umgekehrt ist für jede Verteilungsfunktion F das Maß $\mu = \lambda_F|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $F_\mu = F$.