WS 08/09 Marinescu / Erat

10. Blatt zur Vorlesung Analysis III

Abgabe: 19.01.2009 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(Mengen vom Cantorschen Typ)

Ausgehend vom kompakten Intervall $I = [0,1]$ nehmen wir nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird ein in der Mitte gelegenes offenes Teilintervall I_{11} herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste ein Mittelstück I_{21} bzw. I_{22}, darauf aus jedem der verbleibenen vier Reste ein Mittelstück I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34} usw. Die Vereinigung G aller I_{ij}, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, ist offen. Die kompakte Restmenge $C = I \setminus G$ wird als *Menge vom Cantorschen Typ* bezeichnet.

Sei $0 < \alpha \leq 1/3$. Wählt man $\lambda_1(I_{ij}) = \alpha^i$ für $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, so bezeichnet man mit G_α und C_α die erhaltenen Mengen. Setzt man $\alpha = 1/3$, so spricht man von *der* Cantorschen Menge.

(a) Zeige, daß die Mengen C_α nirgends dicht sind (d.h. jedes Intervall ein zu C_α disjunktes Intervall enthält).

(b) Berechne $\lambda_1(C_\alpha)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax}$ Lebesgue-integrierbar? Berechne: $\int_0^\infty x^s e^{-ax}\,dx = \Gamma(s+1)a^{-s-1}$.

(b) Benutze die Entwicklung $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}$ und den Satz von Beppo Levi um zu zeigen, daß für $s > 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,d\lambda_1\,.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, daß die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\Big)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\ ,$$

differenzierbar sind mit $f' + g' = 0$ und $f + g = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Folgere für $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} t^{2n}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,a^{-n-\frac{1}{2}}\ .$$

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 3 Punkte)

(i) Beweise, daß $(1-t/k)^k \leqslant e^{-t}$ für $0 \leqslant t \leqslant k$, und benutze diese Ungleichung und den Satz von Lebesgue um zu zeigen, daß

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^k (1-\tfrac{t}{k})^k \, t^{x-1}\, dt\,.$$

(ii) Bestimme durch sukzessive partielle Integrationen die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^x k!}{x(x+1)\dots(x+k)}\;.$$

(iii) Berechne $\Gamma(\frac{1}{2})$ unter Verwendung der Aufgabe 3(b), und einer Substitution. Leite mit Hilfe von (ii) für $x = 1/2$ die Wallissche Produktformel her:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\,\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Für die übliche Herleitung siehe Skript S. 77 oder Königsberger, Analysis I, §11.5.)

Hinweis zur Klausur: Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen mindestens 60 Punkte aus den Übungsblättern 1–10 erreicht werden.