11. Blatt zur Vorlesung Analysis III
Besprechung in den Übungen und Hausaugabenbetreuung

Übungsaufgabe
(a) Zeige, daß das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$
für $\alpha \leqslant 0$ und $\alpha \geqslant 2$ weder als uneigentliches Regelintegral noch als Lebesgue–Integral, für $0 < \alpha \leqslant 1$ als uneigentliches Regelintegral aber nicht als Lebesgue–Integral, für $1 < \alpha < 2$ als Lebesgue–Integral und absolut konvergentes uneigentliches Regelintegral existiert.
(b) Zeige, daß $x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2}\,du$. Benutze diese Gleichung zur Bestimmung des Integrals
$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\cos x}{x^{1/2}}\,dx\,, \quad (t > 0)$$
und folgere durch Grenzübergang $t \to +0$:
$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \qquad \text{(Fresnel–Integral)}$$

Übungsaufgabe
(a) Zeige, daß für jedes $A > 0$ die Funktion $f : (0, A) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-xy}\sin x$ integrierbar ist. Folgere, daß
$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \Big(\int_0^A e^{-xy}\sin x\,dx\Big)\,dy\,.$$

(b) Bestimme durch Grenzübergang $A \longrightarrow \infty$ das uneigentliche Regelintegral als
$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
und leite her, daß
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$
(Die letzten beiden Integrale sind Lebesgue–Integrale. Das letzte wird im Beweis des Satzes von Wiener–Ikehara benötigt, der die Basis für den Wienerschen Beweis des Primzahlsatzes ist.)

(bitte wenden)

Übungsaufgabe
Sei $a > 0$ und $S_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 \mathbb{1}_{S_a}(x,y)$ und $g(x,y) = y^2 \mathbb{1}_{S_a}(x,y)$. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (y,x)$.

(a) Zeige, daß f und g Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Zeige $f \circ h = g$. Folgere damit, ohne die Integrale zu berechnen

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} g \, d\lambda_2 \ .$$

(c) Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} (f+g) \, d\lambda_2$ und damit $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2$.

Übungsaufgabe
(a) Zeige, daß das Katenoid $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, daß die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to M$, $\psi(v,u) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Finde eine möglichst große offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\psi|_U : U \to M$ eine Parametrisierung ist.

(c) Zeige, daß $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant \cosh^2(z)\}$ eine glatt berandete Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist, und lege auf $M = \partial D$ die Randorientierung fest. Zeige, daß ψ orientierungserhaltend ist.

(d) Berechne die globale Darstellung der Volumenform ω_K des Katenoids und die lokale Darstellung bezüglich der Karte $\psi^{-1} : \psi(U) \to U$.

(e) Berechne $\psi^*(f\omega_K)$, wobei $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(f) Berechne $\displaystyle\int_M \frac{1}{x^2+y^2} \omega_K$.

Übungsaufgabe
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $V_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$V_\lambda(x,y,z) = \Big(\frac{\lambda x z}{1+x^2} + y \, , x \, , \log(1+x^2) - \lambda z \Big) .$$

(a) Untersuche, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die 1-Form $\omega^{V_\lambda} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ein Potential besitzt, und bestimme für diese λ ein Potential von ω^{V_λ}.

(b) Berechne für die λ, für welche ω^{V_λ} ein Potential besitzt, das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega^{V_\lambda}$ entlang der Kurve $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(8\pi t), (t-1)^2 - t - 1, 5)$.