

**1. Blatt zur Analysis I**

Abgabe: 24.–26.10.11 in den Übungen

<http://www.mi.uni-koeln.de:8915>**1. Aufgabe**

(3 Punkte)

Zeige mit Hilfe der Körperaxiome und den daraus gezogenen Folgerungen in der Vorlesung, dass für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0, d \neq 0$  gilt:

(i)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  genau dann, wenn  $ad = bc$ ;

(ii)  $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ ;

(iii)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ .

**2. Aufgabe**

(4 Punkte)

Benutze nur die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome, die in der Vorlesung daraus gezogenen Folgerungen und Aufgabe 1, um zu zeigen:

(i) Aus  $x > 0$  folgt  $x^{-1} > 0$ , und aus  $x < 0$  folgt  $x^{-1} < 0$ ;

(ii) für  $a, b, c, d > 0$  mit  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  gilt  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

**3. Aufgabe**

(5 Punkte)

(a) Zeige, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

(b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| < 47$ ?**Zusatzaufgabe**

(+ 4 Punkte)

(a) Zeige, dass  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  irrational ist.(b) Sei  $a \in \mathbb{Q}_+$  mit  $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ . Zeige, dass es eine Konstante  $c > 0$  gibt, so dass für alle  $p/q \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{a} \right| \geq \frac{c}{q^2}.$$

(bitte wenden)

### **Hinweis für Erstsemester: Allgemeine Prüfungsanmeldung**

Bevor Sie sich zur **ersten Prüfungsleistung** anmelden können, müssen Sie erst die allgemeine Anmeldung zur Bachelorprüfung vornehmen. Entsprechende Formulare finden Sie unter

<http://www.mi.uni-koeln.de/home-institut/Alle/Lehre-Studium/Pruefungsanmeldung.de.html>

Dem ausgefüllten Zulassungsgesuch und der vorbereiteten Zulassung (hier ist nur der Kopf des Dokumentes auszufüllen) sind ein Lebenslauf, das Abiturzeugnis (Kopie) und der Studentenausweis (Kopie) beizufügen.

**Erstsemester** haben die Möglichkeit, alle Unterlagen in der zweiten Vorlesungswoche am 17.10.2011 nach der Analysis I Vorlesung (d.h. um 9:30 Uhr) im Hörsaal B (Hörsaalgebäude) abzugeben.