

3. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 07.11.–09.11.11 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

- (a) Zeige: Sind $k, n \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt[k]{n}$ ganzzahlig oder irrational. (Tipp: Sei $\sqrt[k]{n} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Folgere $q = 1$ mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.)
- (b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Beweise, dass es $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$ gibt. Mit anderen Worten: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

- (a) Wegen der Bernoulli–Ungleichung gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass außerdem gilt: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Tipp: Binomischer Lehrsatz, endliche geometrische Reihe und Zusatzaufgabe Blatt 2.)
- (b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$.
- (c) Folgere aus (a) und (b): $3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe

(4 Punkte)

- (a) Zeige: Für $a > 1$ ist $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots > 1$, und für $0 < a < 1$ ist $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < 1$.
- (b) Sei $x > 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x^{-n} := (x^{-1})^n$, und für $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ sei $x^{\frac{k}{m}} := \sqrt[m]{x^k}$ definiert. Damit ist also x^q für jedes $q \in \mathbb{Q}$ erklärt. (warum eindeutig?)
Zeige für $x > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$: $x^q x^r = x^{q+r}$ und $(x^q)^r = x^{qr}$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe

(+ 6 Punkte)

Für positive Zahlen a, b definiert man das **arithmetische, geometrische** und **harmonische Mittel** durch

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) := \sqrt{ab}, \quad H(a, b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}.$$

(i) Beweise die Ungleichungen

$$H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$$

und zeige, dass eine Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

(ii) **Das arithmetisch–geometrische Mittel.**

Es sei $0 < a < b$. Man definiere Intervalle $[a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $[a_1, b_1] := [a, b]$ sowie durch

$$a_{n+1} := G(a_n, b_n) \quad \text{und} \quad b_{n+1} := A(a_n, b_n).$$

Man zeige, dass sie eine Intervallschachtelung bilden.

Man zeige ferner die Abschätzung

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2.$$

Die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegende Zahl heißt **arithmetisch–geometrisches Mittel** der Zahlen a und b und wird mit $M(a, b)$ bezeichnet.