WS 11/12 Marinescu / Erat

4. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 14.11.–16.11.11 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n > 0$. Zeige:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big) \geq n^2 \text{ und Gleichheit genau dann, wenn } a_1 = \ldots = a_n.$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeige

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a-1) \quad \text{für} \quad p \in \mathbb{N}\,,\, 1 \leq p < n\,.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1\,,$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0\,, \quad k \in \mathbb{N} \text{ fest}\,,$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,, \quad a \geqslant 0 \text{ fest}\,,$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}\,.$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) $x_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim x_n \geq e$. (Benutze Zusatzaufgabe Blatt 2.)

(ii) Für $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq m < n$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\,.$$

(iii) Folgere $e \geq x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und schließe $\lim x_n = e$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

(a) Zeige (ähnlich wie in der Vorlesung bei der Abschätzung von x_n nach oben), dass für $m > n$ gilt $0 < x_m - x_n < \frac{1}{n!\,n}$.

(b) Folgere $0 < e - x_n \leq \frac{1}{n!\,n}$.

(c) Berechne e bis auf 10^{-3} genau.

(d) Zeige, dass e irrational ist. (Benutze (b) für einen Widerspruchsbeweis.)