

5. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 21.11.–23.11.11 in den Übungen

1. Aufgabe

(5 Punkte)

(a) Bestimme Betrag, Real- und Imaginärteil von

$$(i) \quad \frac{3+4i}{2-i}, \quad (ii) \quad (1+i)^8, \quad (iii) \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$(i) \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2);$$

$$(ii) \quad z, w \neq 0: |z+w| = |z| + |w| \iff z/w > 0.$$

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Beschreibe und skizziere folgende Mengen:

$$(i) \quad M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z-1|\};$$

$$(ii) \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| + |z-i| = 4\};$$

$$(iii) \quad M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \frac{z+i}{z+1} = 0\right\};$$

$$(iv) \quad M_4 = \left\{\frac{i-t}{t-1} \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\right\}.$$

3. Aufgabe

(3 Punkte)

$$(a) \quad \text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ zeige } z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1).$$

$$(b) \quad \text{Sei } g := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ (die Zahl des goldenen Schnittes) und } h := g^{-1}.$$

Sei $\zeta := \frac{1}{2}(h + i\sqrt{4-h^2})$. Zeige, dass ζ eine Lösung der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ (also eine 5. Einheitswurzel) ist. Wie sehen weitere Lösungen aus?

Tipp: Zeige $g = 1 + h$ und $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + gz + 1)(z^2 - hz + 1)$.

Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

$$(i) \quad \text{Sei } S : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, S(z) = \frac{z+i}{z+1}. \text{ Zeige, dass } S \text{ bijektiv ist, und bestimme } S^{-1}. \text{ Vergleiche mit Aufgabe 2 (iii)–(iv).}$$

$$(ii) \quad \text{Sei } a \neq 1 \text{ und } T : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, T(z) = \frac{z-a}{z-1}. \text{ Bestimme } T^{-1}, T \circ T \text{ und } M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} T(z) = 0\}.$$