WS 11/12 Marinescu / Erat

# 6. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 28.11.–30.11.11 in den Übungen

## 1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Zeige, dass die Folge konvergent ist, und berechne ihren Grenzwert.

## 2. Aufgabe (2 Punkte)

Berechne die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad b_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n \ .$$

## 3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} \quad , \quad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \quad , \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5^k} \quad , \quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+5}{k!} \ .$$

Zeige

$$\text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} \ .$$

## Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Zeige: Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ .

(b) Studiere mit Hilfe von (a) die Konvergenz der Folgen:

(i) $\left(\frac{a^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \geqslant 0$ fest;

(ii) $\left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $p \in \mathbb{N}$ fest;

(iii) $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt.