

7. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 05.–07.12.11 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Untersuche $\sum_{n \geq 1} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei a_n definiert sei als:

$$(a) \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad (b) \frac{4n^2 + 2n - 3}{3n^4 - n^3 + 7} \quad , \quad (c) \frac{n^n}{4^n \cdot n!} \quad , \quad (d) \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad .$$

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gibt mit:

(i) $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ für $n \in \mathbb{N}$;

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$.

Tipp: Wähle induktiv $a_0 = \lfloor x \rfloor$, $a_1 = \lfloor 10(x - a_0) \rfloor$, $a_2 = \lfloor 10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10}) \rfloor$, $\dots$, $a_n = \lfloor 10^n(x - a_0 - \frac{a_1}{10} - \dots - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}) \rfloor$, $\dots$

Zeige, dass $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Man schreibt dann $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Diese Darstellung heißt die *Dezimalbruchentwicklung* von x .

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeige:

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Zudem gilt $\left| \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ für jedes $n > N$.

(ii) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^N \left(\frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Folgere: $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow \exp(z)$ für $n \rightarrow \infty$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn es für jedes $z \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$ gibt. Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathbb{C}A := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Zeige:

- (a) Die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ einer beliebigen Familie offener Mengen $\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ ist offen, und der Durchschnitt einer endlichen Familie offener Mengen ist offen. Was gilt für abgeschlossene Mengen?
- (b) Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge, deren Glieder sämtlich in A liegen, auch deren Grenzwert in A liegt.