WS 11/12 Marinescu / Erat

8. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 12.–14.12.11 in den Übungen

1. Aufgabe (2 Punkte)

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$

(ii) $1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + \ldots + a^nb^n + a^{n+1}b^n + \ldots$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{C}$ sei eine Folge (α_n) definiert durch

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_n = \alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Seien $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Die *hypergeometrische Reihe* zu a, b, c ist definiert durch $F_{a,b,c}(z) := \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k b_k}{k!\, c_k} z^k = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)} z^2 + \ \ldots$

(a) Berechne den Konvergenzradius von $F_{a,b,c}$.

(b) Drücke die folgenden Potenzreihen in der Form $F_{a,b,c}(\pm z)$ oder $z \cdot F_{a,b,c}(\pm z)$ aus: (i) $\sum_{k \geqslant 0} z^k$, (ii) $B_s(z) = \sum_{k \geqslant 0} \binom{s}{k} z^k$ mit $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$,

(iii) $L(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige $|\exp(u) - 1 - u| \leq |u|^2$ für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| < 1$ und folgere: $|\exp(w) - \exp(z) - (w-z)\exp(z)| \leq |w-z|^2 \cdot |\exp(z)|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|w-z| < 1$.

(b) Beweise mit Hilfe von (a), dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 6 Punkte)

(i) Sei $a > 0$. Zeige, dass es eine einzige Funktion $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1) = a$ und $\varphi(r+s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.

(ii) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere

$$B_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \ .$$

Zeige mit Hilfe des Cauchy–Produkts, dass $B_{\alpha+\beta}(z) = B_\alpha(z) B_\beta(z)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hinweis: Zeige zunächst, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} \ .$$

(iii) Leite für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, her:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ .$$