WS 11/12 Marinescu / Erat

9. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 19.–21.12.11 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \cos z \sin w + \sin z \cos w$.
(Tipp: $\cos u + i \sin u = \exp(iu)$; betrachte $u = z+w$ und $u = -(z+w)$.)

(b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$, $\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1+\cos z}{2}$, $\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1-\cos z}{2}$.

(c) $\cos z + \cos w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$, $\sin z + \sin w = 2\sin\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Finde die Stetigkeits- und Unstetigskeitsstellen folgender Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

(iii) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

(iv) $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \psi(x) = |\varphi(x) - x|$

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ und $a_0 < 0$. Zeige: Das Polynom $p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ besitzt eine positive Nullstelle.

(b) Zeige, dass die Gleichung $x^2 + 2 = \exp(x)$ eine positive Lösung besitzt.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 6 Punkte)

Sei $x \in (-1, 1)$ fest.

(i) Sei $m > 0$ und $\alpha \in [-m, m]$. Zeige, dass $\left|\binom{\alpha}{k}\right| \leq \binom{m+k-1}{k}$ und die Reihe $\sum_{k\geq 0} \binom{m+k-1}{k} |x|^k$ konvergent ist.

(ii) Zeige, dass die Funktionenreihe $\sum_{k\geq 0} f_k$, $f_k : [-m, m] \to \mathbb{R}$, $f_k(\alpha) = \binom{\alpha}{k} x^k$, normal konvergent ist. Leite her, dass die Funktion $[-m, m] \ni \alpha \mapsto B_\alpha(x)$ stetig ist.

(iii) Beweise die Binomialentwicklung von Newton:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ , \ x \in (-1, 1) \ .$$

Hinweis der Fachschaft Mathematik:

Eure Fachschaft feiert am Freitag den 16.12.2011 ihre diesjährige Nikolausparty im S2 im Mathematischen Institut. Los geht's um 20:30 Uhr mit leckerem Glühwein und kühlem Kölsch! Wir freuen uns auf euch!