

10. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 09.–11.01.2012 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Für $x > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $x^z := \exp(z \cdot \log x)$. Als Komposition stetiger Funktionen sind sowohl $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^z \in \mathbb{C}$ (für festes $z \in \mathbb{C}$) als auch $\mathbb{C} \ni z \mapsto x^z \in \mathbb{C}$ (für festes $x > 0$) stetig. Zeige:

- (a) Für alle $x > 0$, $q \in \mathbb{Q}$ stimmt die obige Definition von x^q mit der Definition aus der Vorlesung (Skript Definition 1.5.8) überein.
- (b) Für alle $x, y > 0$, $z, w \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(xy)^z = x^z y^z$, $x^{z+w} = x^z x^w$, $(x^a)^z = x^{az}$; für $x > 1$ und $a < b$ gilt $x^a < x^b$; für $a > 0$ und $x < y$ gilt $x^a < y^a$.

2. Aufgabe

(3 Punkte)

Berechne die folgenden Grenzwerte:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \log x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y$.
- (ii) Sei $a > 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^a$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \log x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^a}$.
- (iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)$, wobei $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$.

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Berechne jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \ni x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, c \neq 0;$$

$$f_2: \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x \log x \in \mathbb{R};$$

$$f_3: \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^x \in \mathbb{R};$$

$$f_4: \mathbb{R} \ni x \mapsto \log \sqrt{1 + \sin^2 x} \in \mathbb{R};$$

$$f_5 := \tanh = \frac{\sinh}{\cosh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{wobei}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Tipp: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe**(+ 6 Punkte)**

Sei $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $U \subset D$ heißt Umgebung von z_0 in D , wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(z_0) \cap D \subset U$. Zeige:

- (i) Ist U eine Umgebung von z_0 in D und $U \subset V$, so ist auch V eine Umgebung von z_0 in D .
- (ii) Sind U, V zwei Umgebungen von z_0 in D , so ist es auch $U \cap V$.
- (iii) $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \iff$ zu jeder Umgebung V von $f(z_0)$ gibt es eine Umgebung U von z_0 mit $f(U) \subset V$.