WS 11/12 Marinescu / Erat

12. Blatt zur Analysis I

Abgabe: 23.–25.01.2012 in den Übungen

Hinweis:
Für die Klausurzulassung müssen mindestens 72 Punkte aus den Übungsblättern 1–12 erreicht werden.

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, dass die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist.

(b) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ bezeichne die inverse Funktion von cos. Zeige, dass $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ differenzierbar ist, und berechne die Ableitung.

(c) Zeige, dass $\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \arctan x$ für alle $x \in [0, \infty)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Die Funktion f sei definiert durch

$$f : \Big[-\frac{1}{2}, \infty \Big) \longrightarrow \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{4}{x+1} .$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von f.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.
Finde eine Stammfunktion zu arcsin. (Tipp: $\arcsin x = (x)' \cdot \arcsin x$)
Verifiziere: $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \arcsin x \, dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Finde eine Stammfunktion zu $\log^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. (Tipp: zweimal Tipp zu (a))
Verifiziere: $\int_1^2 \log^2(x) \, dx = 2 \log^2\left(\frac{e}{2}\right)$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Berechne mithilfe der Substitutionsregel die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x} \, dx$ auf $(0, 1)$,

(b) $\displaystyle\int 9 \sqrt{\frac{\operatorname{arsinh} 6x}{1 + 36x^2}} \, dx$, wobei $\operatorname{arsinh} x := \sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} \, dx$ auf $\mathbb{R}_+$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx$ mit $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Tipp: $y = \tan x$).