SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale:

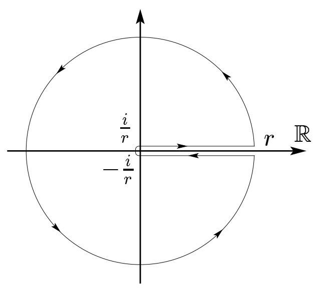
(a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{(a+\cos\theta)(a-\sin\theta)}\, d\theta \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}, a > 1$$

(b)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Aufgabe 2. Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion (d.h. p und q sind Polynome) mit $q(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{R}$. Es sei $\mathrm{Grad}(q) = \mathrm{Grad}(p) + 1$, so daß f in ∞ eine einfache Nullstelle hat. Zeige, daß der Grenzwert
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx$$
existiert (mit reellen Methoden).

Bestimme die Differenz
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx - 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_a(f).$$

Aufgabe 3. Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion ohne Pole auf $\mathbb{R}_0^+$ und $\mathrm{Grad}(q) \geq \mathrm{Grad}(p) + 2$. Leite eine Residuenformel für $\int_0^\infty f(x)\, dx$ her durch Anwendung des Residuensatzes auf die Funktion $f(z)\log z$ (wo $\log(Re^{i\phi}) = \log(R) + i\phi$ mit $0 < \phi < 2\pi$) und den im Bild gezeigten Integrationsweg.



Aufgabe 4. Bestimme die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten.

(a) $z^8 - 3z^2 + 1$ in $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| > 1\}$

(b) $z^4 + 6iz^2 - 9z + i$ in $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$.

Abgabe: Donnerstag 4.7.2002 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.