SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Konstruiere eine Folge holomorpher Funktionen f_n auf der offenen Einheitskreisscheibe D mit den Eigenschaften

- (f_n) konvergiert lokal gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{O}(D)$.
- Jedes f_n hat unendlich viele Nullstellen in D, aber f hat keine Nullstelle in D.

Aufgabe 2. Konstruiere eine Folge von auf $\mathbb{C}$ meromorphen und auf $\mathbb{C}\setminus\{z : |z| = 1\}$ holomorphen Funktionen f_n mit der Eigenschaft, daß (f_n) auf $\{z : |z| < 1\}$ (bzw. $\{z : |z| > 1\}$) lokal gleichmäßig gegen f (bzw. g) konvergiert.

Aufgabe 3. Zeige, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2^\nu} - z^{-2^\nu}}$$

auf $\mathbb{C}^* \setminus \{z : |z| = 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

Hinweis: Schreibe $1/(z^{2^\nu} - z^{-2^\nu})$ in geeigneter Weise als Differenz, so daß sich in der endlichen Summe $\sum_{\nu=1}^{n}$ eine alternierende Summe ergibt, bei der sich alle Terme bis auf den ersten und den letzten wegheben.

Aufgabe 4. Setze $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\, dx$.

(a) Zeige $2I_n = (n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$ durch partielle Integration.

(b) Drücke I_{2k} durch I_0 aus und bestimme I_{2k+1} explizit.

(c) Zeige $I_n^2 < I_{n-1}I_{n+1}$, indem $I_n^2 - I_{n-1}I_{n+1}$ als Determinante einer geeigneten quadratischen Gleichung aufgefaßt wird.

(d) Beweise mittels (b) und (c) die Abschätzung

$$\frac{(k!)^2}{4k+2} < I_{2k}^2 < \frac{k!}{4k}.$$

(e) Zeige mittels (d) und unter Verwendung der Wallisschen Formel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots,$$

daß das Gaußsche Fehlerintegral I_0 den Wert $\sqrt{\pi}/2$ hat.

Abgabe: Donnerstag 11.7.2002 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.