SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Zeige:

1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2. $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$
3. $\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$,
   $\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$
4. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}, \arg e^z = \mathrm{Im}\, z$, d.h. sind $z = x + iy$ gilt $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
5. $e^{2\pi i} = 1$.

Aufgabe 2. Sei

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + az^n}$$

mit $a \neq 0$. Zeige, daß die Folge (f_n) auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen 1 konvergiert und für $r > 1$ auf $\mathbb{C} - D_r(0)$ gleichmäßig gegen 0.

Aufgabe 3. Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion in z, wo $z = x + iy$? Bestimme diese holomorphen Funktionen.

Aufgabe 4. Betrachte die Abbildung

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$). Die Abbildung f ist holomorph und $f'(z) = 2z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Bestimme Gleichungen für die Bildkurven der Geraden $\{x = a\}$ und $\{y = b\}$, wo $z = x + iy$ und $a, b \in \mathbb{R}^*$ (es handelt sich um Parabeln). Zeige, daß jede Parabel der ersten Schar jede Parabel der zweiten Schar senkrecht schneidet.

Abgabe: Donnerstag 25.4.2002 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft