SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei γ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Setze das Integral

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz$$

in Relation zu der von γ eingeschlossenen Fläche (vgl. das Beispiel aus Abschnitt 2.1 der Vorlesung).

(Hinweis: Setze $z = x + iy$ und $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.)

Aufgabe 2.

1. Zeige, daß die Funktion $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ keine Stammfunktion besitzt.
2. Berechne die Integrale

$$\int_{\gamma_k} z e^{iz^2}\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_k} (z-k)^{-3}\, dz,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei die Pfade gegeben sind durch

$$\gamma_k(t) := (5 + \sin(kt)) e^{it}$$

mit $t \in [\pi/k, \pi(k+1)/k]$.

Aufgabe 3. Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$$

für $|a| < r < |b|$ und $n, m \in \mathbb{N}$ und

$$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Sei

$$t_n(z) := 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \ldots + \frac{1}{n!} z^n$$

das n-te Taylorpolynom der Funktion e^z. Dann gilt

$$|e^z - t_n(z)| < |z|^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) < 0$.

(Hinweis: Schreibe den Term $e^z - t_n(z)$ als Wegintegral einer Funktion.)

Abgabe: Donnerstag 2.5.2002 bis 17:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft