SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei f eine ganze, nichtkonstante Funktion. Zeige, daß die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Aufgabe 2. Sei f eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeige $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$ die längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene.

$\mathbb{C}^-$ ist sternförmig bezüglich des Punktes 1, d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}^-$ liegt das ganze Segment $[1, z]$ in $\mathbb{C}^-$.

(a) Zeige, daß eine auf einem sternförmigen Gebiet definierte, holomorphe Funktion dort eine Stammfunktion besitzt.

(b) Berechne

$$F(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$z \in \mathbb{C}^-$ und verifiziere direkt, daß $F(z)$ eine Stammfunktion von $1/z$ ist.

Aufgabe 4. Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$ (mit $r > 0$) liege in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und es seien zwei holomorphe Funktionen f, g auf G gegeben, so daß der Punkt $a \in \partial B_r(0)$ die einzige Nullstelle von g auf $\overline{B_r(0)}$ sei und so daß $g'(a) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$.

Es sei $\sum a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f/g um 0. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a.$$

Abgabe: Freitag 10.5.2002 bis 15:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft