SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeige, daß bei der stereographischen Projektion Kreislinien in $\mathbb{S}^2$ auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet werden und umgekehrt.

Aufgabe 2. Bestimme das Konvergenzgebiet folgender Laurentreihen:

(a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{-\nu!}$$

(b)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^4+2}$$

(c)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^{\nu}}{2^{\nu}+1}$$

Aufgabe 3. Berechne die Laurentreihe der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

(a)

$$\frac{1}{z^2-z} \quad \text{im Gebiet } 1<|z-2|<2.$$

(b)

$$\frac{e^z}{z^2+1} \quad \text{im Gebiet } |z|>1.$$

(c)

$$\cos\left(\frac{z+1}{z}\right) \quad \text{im Gebiet } \mathbb{C}^*.$$

Aufgabe 4. Bestimme die Art der Singularitäten der folgenden Funktionen f im angegebenen Punkt z_0. Bei hebbaren Singularitäten bestimme man den Grenzwert von f; für Pole berechne man den Hauptteil.

(a)

$$f(z)=e^{z-\frac{1}{z}} \quad \text{in } z_0=0.$$

(b)

$$f(z)=\frac{z^2\cos z}{\sinh^4 z} \quad \text{in } z_0=0, \text{ wobei } \sinh(z)=\frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right).$$

(c)

$$f(z)=\frac{z}{\sin z} \quad \text{in } z_0=2\pi k \text{ mit } k\in\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 5. Sei $f(z)=\exp(1/z)$. Zeige, daß

$$f(A_{0,\varepsilon}(0))=\mathbb{C}^*$$

für beliebig kleine $\varepsilon>0$.

Abgabe: Donnerstag 30.5.2002 <u>bis 16:00</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft