SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Das **Doppelverhältnis** $[z_0, z_1, z_2, z_3]$ von paarweise verschiedenen Punkten $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ist definiert als
$$[z_0, z_1, z_2, z_3] := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Man erweitert die Definition des Doppelverhältnis auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$, indem man Grenzwerte betrachtet. Z.B. ist das Doppelverhältnis $[\infty, z_1, z_2, z_3]$ gegeben durch

$$[\infty, z_1, z_2, z_3] := \lim_{n\to\infty} [w_n, z_1, z_2, z_3] = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1},$$

wobei $(w_n)_n \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge mit $\lim_n w_n = \infty$ ist.

Aufgabe 1. Schreibe den Automorphismus $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ von $\hat{\mathbb{C}}$ als Doppelverhältnis in der Form $Tz = [z, z_1, z_2, z_3]$.

Finde eine Abbildung $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, die die obere Halbebene $\{z\colon \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe abbildet.

Aufgabe 2. Zeige, daß Elemente in $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ beliebige Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ auf Kreise oder Geraden abbilden.

Aufgabe 3. Seien κ_1 und κ_2 zwei Kreise in $\mathbb{C}$ und a, b Punkte mit $a \notin \kappa_1$ und $b \notin \kappa_2$.

Finde alle Abbildungen $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $T(\kappa_1) = \kappa_2$ und $T(a) = b$.

Aufgabe 4. Eine gebrochen lineare Transformation liegt in $\mathrm{Aut}(D_1(0))$ genau dann, wenn sie in der Form
$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$
mit $|a| > |b|$ geschrieben werden kann.

Abgabe: Donnerstag 6.6.2002 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft