SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt ist gebührenfrei!

Aufgabe 1. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Seien α, β Wege von x_0 nach x_1 in X. Zeige $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Hinweis: $\alpha\beta^{-1} \simeq x_0 \operatorname{rel}\{0,1\}$. Wie liefert dies eine Homotopie von α nach β, die den Endpunkt x_1 fest läßt?

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeige, daß es eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in G$ gibt.

Beschreibe die Menge aller Funktionen mit dieser Eigenschaft. Definiere mittels f eine Wurzelfunktion auf G, d.h. eine holomorphe Umkehrung von $z \mapsto z^2$.

Aufgabe 3. (a) Zeige $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) = \mathbb{Z}$, erzeugt durch die Klasse von

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Hinweis: Für einen geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ betrachte

$$\gamma_t = \gamma\,|_{[0,t]}$$

und

$$\widetilde{\gamma}(t) = \int_{\gamma_t} \frac{dz}{z}.$$

Zeige, daß dies einen Weg in $\mathbb{C}$ definiert mit $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ und $\exp(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Dann ist $\widetilde{\gamma}$ homotop $\operatorname{rel}\{0,1\}$ in $\mathbb{C}$ zur Strecke von 0 nach $2\pi i k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeige, daß $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}, 0)$ die triviale Gruppe ist. Hinweis: Zerlege einen gegebenen Weg in Teilstücke, die ganz in $\hat{\mathbb{C}} - \{0\}$ oder $\hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$ verlaufen.

Aufgabe 4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $g_0, g_1 \in \mathcal{O}(G)$. Setze als bekannt voraus (besser: zeige), daß jeder Punkt $z_0 \in G$ eine Umgebung hat, auf der die Differentialgleichung

$$w'' + g_1(z)w' + g_0(z)w = 0$$

zwei linear unabhängige holomorphe Lösungen hat, die den Raum aller holomorphen Lösungen aufspannen.

Sei $f(z)$ eine holomorphe Lösung der Differentialgleichung in $D_\epsilon(z_0) \subset G$. Zeige, daß sich f längs jeden Weges in G analytisch fortsetzen läßt. Ist G einfach zusammenhängend, so existiert daher eine auf ganz G holomorphe Lösung.

Abgabe: Donnerstag 13.6.2002 <u>bis 16:00</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.